Νικόλαος Σαμπάνης

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΓΙΑ ΦΟΙΤΗΤΕΣ

- Θεωρία – συνοπτικές σημειώσεις
- Λυμένα παραδείγματα
- Ασκήσεις
- Οπτικοποίηση Mathematica

www.askisopolis.gr

2023

1.2.2 Γραμμικές Εξισώσεις

Μια διαφορική εξίσωση (ΔΕ) 1ης τάξης καλείται **γραμμική** αν μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (2.3)$$

Αν $f(x) = 0$ η ΔΕ (2.3) λέγεται **ομογενής.** Διαφορετικά καλείται **μη ομογενής .**

Η $y = 0$ είναι προφανής λύση της ομογενούς και καλείται **τετριμμένη.** Κάθε μη μηδενική λύση καλείται μη τετριμμένη

Παράδειγμα 2.4 Οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

(i) $y' - \frac{2}{x^3}y = 1 \qquad \left[x^3y' - 2y = x^3\right]$

(ii) $y' - \frac{\ln x}{x}y = 0 \qquad \left[xy' - \ln xy = 0\right]$

(iii) $y' = -x^2y - e \qquad \left[y' + x^2y = -e\right]$

είναι της μορφής (2.3) , συνεπώς είναι γραμμικές . Στην παρένθεση φαίνεται η διαφορετική μορφή με τη οποία μπορεί να δοθούν και ανάγονται σε γραμμικές με την προϋπόθεση ότι χρησιμοποιούνται αλγεβρικές πράξεις (για να έρθουν στην μορφή 2.3)

Μεθοδολογία επίλυσης Γραμμικής Διαφορικής 1ης τάξης

Η επίλυση μιας γραμμικής ΔΕ 1ης τάξης ενδέχεται να ανάγεται σε επίλυση εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών κυρίως στην περίπτωση της ομογενούς αλλά και σε άλλες περιπτώσεις. Θα ακολουθήσουν λυμένα παραδείγματα στα οποία θα βλέπουμε δύο τρόπους επίλυσης μιας γραμμικής εξίσωσης.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

I. Αναγωγή σε χωριζόμενων μεταβλητών

II. Μέθοδος Ολοκληρωτικού παράγοντα.

Μέθοδος ολοκληρωτικού παράγοντα

ΒΗΜΑ 1 Θεωρούμε την συνάρτηση $P(x) = e^{\int p(x)dx}$ του ολοκληρωτικού παράγοντα

ΒΗΜΑ 2 Πολλαπλασιάζουμε την (2.3) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα.

ΒΗΜΑ 3 Στο πρώτο μέλος εμφανίζεται η παράγωγος γινομένου όπου η μία συνάρτηση είναι ο ολοκληρωτικός παράγοντας

ΒΗΜΑ 4 Ολοκληρώνουμε κατά μέλη με τα αντίστοιχα διαφορικά .

Παράδειγμα 2.5 Να λυθεί η εξίσωση $y'+y=e^{-x}$

Λύση

Η εξίσωση $y'+y=e^{-x}$ είναι γραμμική ΔΕ 1ης τάξης (δηλαδή της μορφής 2.3) με $p(x)=1$ και $f(x)=e^{-x}$.

<u>ΒΗΜΑ 1</u> Υπολογίζουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα : $P(x)=e^{\int 1dx}=e^{x}$

[ΒΗΜΑ 2] $$e^{x}\left(y'+y\right)=e^{x}e^{-x}$$

$$y'e^{x}+ye^{x}=1$$

[ΒΗΜΑ 3] $$\left(ye^{x}\right)'=1$$

[ΒΗΜΑ 4] $$\int\left(ye^{x}\right)'dx=\int 1dx\Rightarrow ye^{x}=x+c$$

Άρα $y(x)=xe^{-x}+ce^{-x}$

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟ MATHEMATICA – ΕΥΡΕΣΗ ΛΥΣΗΣ

```
In[7]:= DSolve[y'[x] + y[x] == Exp[-x], y[x], x]
        λύση διαφορικής εξίσωσης   εκθετική συνάρτηση
Out[7]= {{y[x] → e^-x x + e^-x C[1]}}
```

Παράδειγμα 2.6 Να λυθεί η εξίσωση $y'+\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}$

Λύση [α΄ τρόπος – ολοκληρωτικός παράγοντας]

Η εξίσωση $y'+\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}$ είναι γραμμική ΔΕ 1ης τάξης (δηλαδή της μορφής 2.3) με

$p(x)=\frac{1}{2}$ και $f(x)=\frac{3}{2}$. $P(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{2}dx}=e^{\frac{x}{2}}$

$$y'+\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}\Rightarrow e^{\frac{x}{2}}y'+\frac{1}{2}ye^{\frac{x}{2}}=\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}\Rightarrow e^{\frac{x}{2}}y'+\left(\frac{x}{2}\right)'ye^{\frac{x}{2}}=\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}\Rightarrow\left(y\cdot e^{\frac{x}{2}}\right)'=\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}.$$ Άρα

$$\int\left(y\cdot e^{\frac{x}{2}}\right)'dx=\int\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}dx\Rightarrow y\cdot e^{\frac{x}{2}}=3e^{\frac{x}{2}}+c\Rightarrow y(x)=3+ce^{-\frac{x}{2}}$$

[β΄ τρόπος – χωριζόμενων μεταβλητών] Παρατηρούμε πως η $y(x)=3$ είναι λύση της ΔΕ. $y'+\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}y\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y-3}{2}$. Για $y(x)\neq 3$ έχουμε : $\frac{1}{y-3}dy=-\frac{1}{2}dx\Rightarrow\int\frac{1}{y-3}dy=\int\left(-\frac{1}{2}\right)dx\Rightarrow\ln|y-3|=-\frac{x}{2}+c$

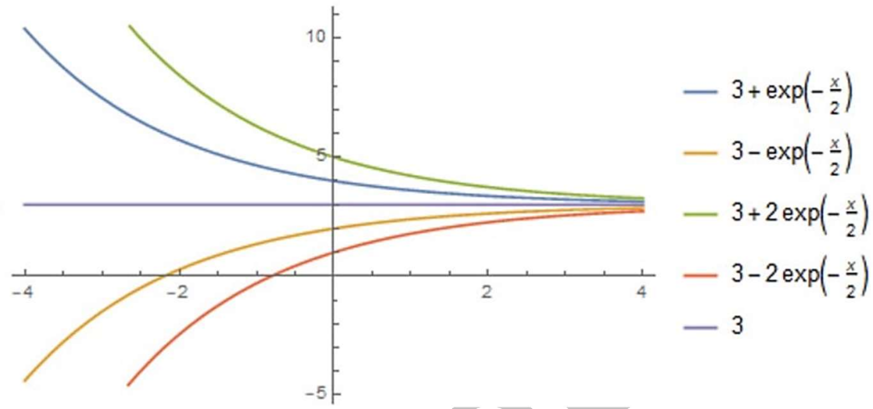
$$|y-3|=e^{-\frac{x}{2}}e^{C}\Rightarrow y-3=\pm e^{-\frac{x}{2}}e^{C}\Rightarrow y=3+ce^{-\frac{x}{2}}\text{ όπου } c=\pm e^{C}$$

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟ MATHEMATICA – ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΛΥΣΗΣ

Για διάφορες τιμές του c παίρνουμε τις λύσεις της $y'+\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}$

```
Plot[{3 + Exp[-x / 2], 3 - Exp[-x / 2], 3 + 2 * Exp[-x / 2], 3 - 2 * Exp[-x / 2], 3}, {x, -4, 4},
|διάγραμμα  |εκθετική συνάρτηση |εκθετική συνάρτηση  |εκθετική συνάρτηση  |εκθετική συνάρτηση
 PlotLegends → "Expressions"]
 |υπομνήματα διαγράμματος
```

Out[18]=



Παράδειγμα 2.7 Να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ $y'+2ty=t,\ y(0)=0$

Λύση [ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΔΩ Η ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΕΙΝΑΙ t]

Η εξίσωση $y'+2ty=t$ είναι γραμμική ΔΕ 1ης τάξης (δηλαδή της μορφής 2.3) με $p(t)=2t$ και $f(t)=t$. $P(t)=e^{\int p(t)dt}=e^{\int 2tdt}=e^{t^2}$

$y'+2ty=t \Rightarrow e^{t^2}y'+e^{t^2}2ty=e^{t^2}t \Rightarrow \left(ye^{t^2}\right)'=te^{t^2} \Rightarrow \int\left(ye^{t^2}\right)'dt=\int te^{t^2}dt$. Άρα

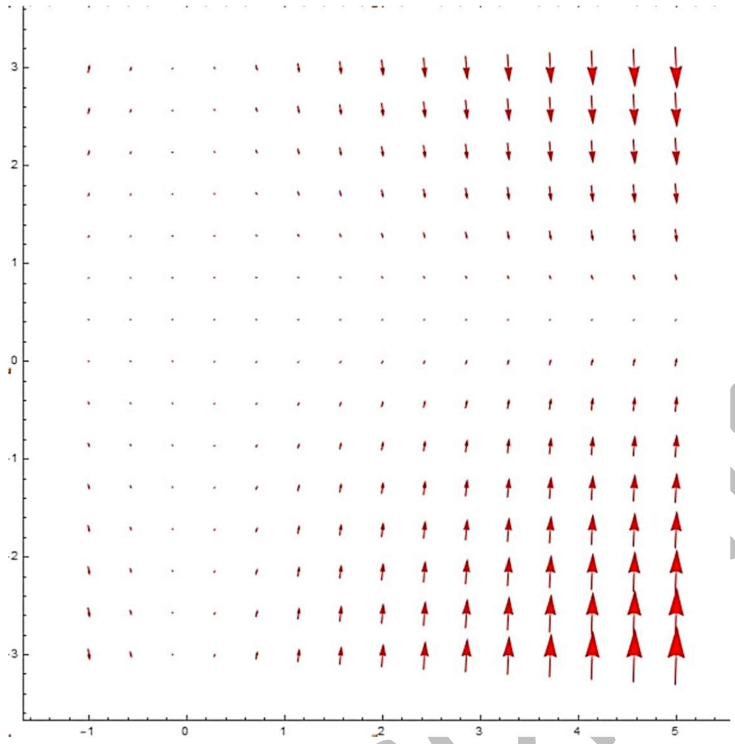
$ye^{t^2}=\frac{1}{2}e^{t^2}+c \Rightarrow y(t)=\frac{1}{2}+ce^{-t^2}$. Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $y(0)=0$, έχουμε $y(0)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+ce^{-0^2}=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$. Άρα $y(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-t^2}$

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟ MATHEMATICA – ΕΥΡΕΣΗ ΛΥΣΗΣ

```
In[8]:= DSolve[{y'[x] == x - 2 x * y[x], y[0] == 0}, y[x], x]
        |λύση διαφορικής εξίσωσης
```

Out[8]= $\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{2}e^{-x^2}\left(-1+e^{x^2}\right)\right\}\right\}$

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟ MATHEMATICA – ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΛΥΣΗΣ



Σχήμα 2.1 Πεδίο διευθύνσεων της $y'+2ty=t$

Παρατηρούμε ότι όλες οι λύσεις προσεγγίζουν την λύση ισορροπίας $y=\frac{1}{2}$ καθώς $t\to+\infty$.

Παράδειγμα 2.8 Να βρεθεί η λύση της ΣΔΕ $xy'+(1+x)y=e^{-x}$, $x>0$

Λύση [ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΔΩ Ο ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΟΥ ΟΡΟΥ y' ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ 1 !!!!]

Η εξίσωση $xy'+(1+x)y=e^{-x}$, $x>0$ είναι γραμμική ΔΕ 1ης τάξης αλλά ο συντελεστή του όρου y' δεν είναι 1 άρα ΔΕΝ είναι της μορφής (2.3). Έχουμε

$$xy'+(1+x)y=e^{-x}\overset{x>0}{\Rightarrow}y'+\frac{(1+x)}{x}y=\frac{e^{-x}}{x}\Rightarrow y'+\left(1+\frac{1}{x}\right)y=\frac{e^{-x}}{x}$$ η οποία είναι της μορφής (2.3) με $p(x)=1+\frac{1}{x}$ και $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$. Υπολογίζοντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα έχουμε $P(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx}=e^{\ln x+x}=xe^{x}$. Άρα

$$xe^{x}y'+xe^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)y=xe^{x}\frac{e^{-x}}{x}\Rightarrow xe^{x}y'+\left(xe^{x}+e^{x}\right)y=1\Rightarrow\left(xe^{x}y\right)'=1$$ Άρα

$$\int\left(xe^{x}y\right)'dx=\int 1dx\Rightarrow xe^{x}y=x+c\Rightarrow y(x)=\frac{x+c}{x}e^{-x},\ x>0.$$

Ασκήσεις

1. Να λυθεί η γραμμική ΣΔΕ 1ης τάξης $y' + \frac{2}{x}y = 3x^3$. [Απ: $y(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{C}{x^2}$]

2. Να λυθεί το ΠΑΤ $\frac{dy}{dt} + t^{-1}y = 1$, $y(1) = 0,\ t > 0$. [Απ: $y(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t}),\ t > 0$]

3. Να λυθεί το ΠΑΤ $y' - y/2 = e^{-t}$, $y(0) = -1$. [Απ: $y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + ce^{t/2}$]

4. Να βρεθεί η γενική λύση του ΠΑΤ $y' + 2y = g(t)$, $y(0) = 0$ όπου $g(t)$ μια συνάρτηση απλής ασυνέχειας ενός συνηθισμένου μηχανισμού διακόπτη με,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

5. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης και να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της συμπεριφοράς των λύσεων καθώς $t \to +\infty$.

(i) $y' + 3y = t + e^{-2t}$ [Απ: $y(t) = ce^{-3t} + (t \backslash 3) - (1 \backslash 9) + e^{-2t}, y \to \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$]

(ii) $y' - 2y = x^2e^{2x}$ [Απ: $y(t) = ce^{2x} + x^3e^{2x}/3, y \to \infty$]

(iii) $y' + y = 5\sin 2t$ [Απ: $y(t) = ce^{-t} + \sin 2t - 2\cos 2t, y \to \sin 2t - 2\cos 2t$]

(iv) $xy' - y = x^2e^{-x}$ [Απ: $y(x) = ce^{2x} + x^3e^{2x}/3, y \to \infty$]

(v) $(1+t^2)y' + 4ty = (1+t^2)^{-2}$ [Απ: $y(t) = \frac{\arctan t + c}{(1+t^2)^2}, y \to 0$]

6. Να βρεθεί η λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών :

(i) $xy' + 2y = x^2 - x + 1, y(1) = \frac{1}{2}, x > 0$ [Απ: $y(x) = \frac{3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1}{12x^2}$]

(ii) $ty' + (t+1)y = t,\ y(\ln 2) = 1$ [Απ: $y(t) = \frac{t - 1 + 2e^{-t}}{t}, t \ne 0$]

(iii) $xy' + 2y = \sin x,\ y(\pi/2) = 1$ [Απ: $y(x) = x^2\left[(\pi^2/4) - 1 - x\cos x + \sin x\right]$]

(iv) $t^3y' + 4t^2y = e^{-t},\ y(-1) = 0$ [Απ: $y(t) = -(1+t)e^{-t}/t^4, t \ne 0$]

$y' - te^{-2t} = -2y,\ y(1) = 0$ [Απ: $y(t) = (t^2 - 1)e^{-2t}/2$